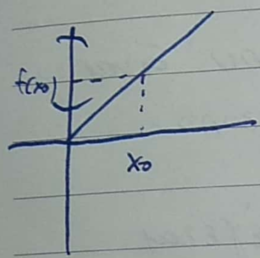
19 - 03 - 2018

$f(x) = x$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R} \to$ f συνεχής στο x_0

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : (\forall x \in \mathbb{R})\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$|f(x_0) - f(x)| \Leftrightarrow f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$

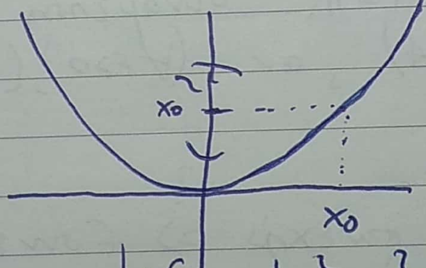


$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$\delta = \varepsilon$ το δ δεν εξαρτάται από το x_0

f συνεχ. στο x_0

$f(x) = x^2$



$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |x^2 - x_0^2| < \varepsilon$

$\Downarrow$

?

$|x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0|$

$\delta \leq 1$ ($1^{ος}$ περιορ)

$\Downarrow$

$|x - x_0| \leq 1$

$|x| \leq |x_0| + 1 \Leftarrow |x - x_0| \leq \delta \leq 1$

$$|x^2 - x_0^2| = |x - x_0|\,|x + x_0|$$

$$\delta(|x| + |x_0|) \leq (2|x_0| + 1)\delta < \varepsilon$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4|x_0| + 2}$$

δ εξαρτάται απο x_0

Θα δείξουμε ότι αν $\varepsilon > 0$ $\not\exists \delta > 0 : \forall x, y \in \mathbb{R}$
$|x - y| < \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| < \varepsilon$ ①

$\Downarrow$

[που να εξαρτάται μόνο από το ε]

Με άτοπο: Αν $\exists \delta > 0$, ώστε ①

$\forall x \in \mathbb{R}$, $y = x + \frac{\delta}{2} \Rightarrow |y - x| = \frac{\delta}{2} < \delta$

① $\left|x^2 - \left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2\right| = \left|x \cdot \delta + \frac{\delta^2}{4}\right| < \varepsilon \ \forall x \in \mathbb{R}$ που είναι άτοπο.

Ορισμός: Δίνεται $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ συνάρτηση λέγεται ομοιόμορφα συνεχής (στο A), αν $(\forall \varepsilon > 0), (\exists \delta > 0) (\forall x, y \in A)$: $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Ερώτηση: Αν $f : A \to \mathbb{R}$ ομ. συνεχής $\overset{?}{\Rightarrow}$ f συνεχής στο A.
Ναι επειδή αυτό που έχω είναι πιο ισχυρό.

Scanned by CamScanner

Ερώτηση $f: A \to \mathbb{R}$ ομ. συν. $B \subseteq A \overset{?}{\Rightarrow} f$ ομ. συνεχ στο B

Ναι επειδή το $B \subseteq A$ που το περιέχει.

$f(\underbrace{[\alpha, b]}_{=[-M, M]}) \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$ Ερ. f ομ. συνεχ;

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): \forall x, y \in [-M, M] \ |x^2 - y^2| < \varepsilon$

$|x^2 - y^2| = |x-y||x+y| \leq (|x|+|y|)|x-y| < \delta\,(2M) < \varepsilon$

$\delta = \dfrac{\varepsilon}{4M}$ ανεξ. του y.

Ορσ. $f: A \to \mathbb{R}$ θα λέγεται Lipschitz αν ικανοποιεί:

$|f(x) - f(y)| \leq M\,|x-y|$

$\forall x, y \in A$ για κάποιο $M > 0$

π.χ. $f: [M, M]$

$f(x) = x^2$

$|f(x) - f(y)| = |x-y||x+y| \leq 2M\,|x-y|$

$f \in Lip(2M)$

Πρόταση: $f: A \to \mathbb{R}$ $Lip(M) \Rightarrow f$ ομοιομ. συνεχής (στο A)

Αποδ: Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f \in Lip(M) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$, $\forall x, y \in A$.

Θα βρούμε ένα $\delta > 0$ $\left.\begin{matrix} |x-y| < \delta \\ x, y \in A \end{matrix}\right\} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$ τότε αν $|x-y| < \delta = \frac{\varepsilon}{2M}$ $\forall\, x,y \in A$ $\Big\} \overset{①}{\Rightarrow} |f(x)-f(y)| \leq M \cdot \delta =$

$= M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Πρόταση: $I \subseteq \mathbb{R}$
$f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I, παραγωγ. $\forall$ εσωτερικό σημείο του I με $|f'(x)| \leq M$, $\forall$ τέτοιο σημείο $x \Rightarrow f \in Lip(M)$
(υπάρχει $\leq$ x σημείο στο κλειστό I που $|f'(x)| \leq M$)

Έστω $x<y$, $[x,y] \subseteq I$, $f(x)$ συνεχής στο $[x,y]$, $f(x)$ παραγωγίσιμη στο (x,y) $\Big\} \Rightarrow \exists\, \xi \in (x,y)$: $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ ①

① $\Rightarrow |f(x)-f(y)| = |f'(\xi)||x-y| \leq M|x-y|$ $\quad \xi \in I$

Άσκηση:
$f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [1, +\infty)$

$$|f'(x)| = \left|\frac{1}{2\sqrt{x}}\right| = \frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow f \in Lip(1/2)$ στο $[1,+\infty) \to f$ ομοιομ. συνεχ.

$f, g : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο A

Πρόταση $f, g : A \to \mathbb{R}$ ομοιομ. συνεχής ①
$\Rightarrow f+g$ ομ. συνεχής

Αποδ: $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0) : (\forall x,y \in A)\ |x-y|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$
$(\exists \delta_2>0) : \forall x,y \in A : |x-y|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)-g(y)|<\varepsilon$

$|(f+g)(x)-(f+g)(y)| = |(f(x)-f(y))+(g(x)-g(y))| \leq |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$

$\forall x,y \in A \quad |x-y|<\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

<u>Πρόταση</u> 2:

$f, g : A \to \mathbb{R}$ ομ. συνεχ , f, g φραγμένο $\Rightarrow f \cdot g$ ομοιομ. συν.

f, g ομ. συνεχ. $(\forall \varepsilon>0)$ $(\exists \delta>0) \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon/2M$ και $|g(x)-g(y)|<\varepsilon/2M$ $\forall x,y \in A$

$|(fg)(x)-(fg)(y)| = |f(x)g(x)-f(y)g(y)| = |f(x)g(x)-f(y)g(x)+f(y)g(x)-f(y)g(y)|$ προσθαφαίρεση του $f(y)g(x)$.

$\leq |f(x)-f(y)||g(x)|+|f(y)||g(x)-g(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2M}\cdot M+\frac{\varepsilon}{2M}\cdot M = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$

$f(x)=x=g(x)$, $x\in\mathbb{R}$ που είναι ομ. συν.

αλλά $f\cdot g = x^2$ που δεν είναι ομ. συν.

Αρχή μεταφοράς

$f : A \to \mathbb{R}$ συνεχ στο $x_0 \in A \iff \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ με $x_n \to x_0 \Rightarrow$ (*) $f(x_n) \to f(x_0)$

Scanned by CamScanner

Θεώρημα

$f: A \to \mathbb{R}$ συνάρτηση τότε f ομ. συνεχ. $\Leftrightarrow$

$[\forall (x_n)_n, (y_n)_n \subseteq A$ με $x_n - y_n \to 0 \Rightarrow f(x_n) - f(y_n)$ ακολουθία μηδενική$]$ (**)

Απόδ. f ομοι. συνεχ. στο A

Έστω $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq A$ με $x_n - y_n \to 0$

Θ.δ.ο. $f(x_n) - f(y_n) \to 0$

Αν $(\varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : (\forall x, y \in A)\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Αν $(\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ |x_n - y_n| < \delta$

① $\Rightarrow |f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon, \ (\forall n \geq n_0)$

$x_n = \quad \to \ell$

$y_n = \quad \to \ell$

$x_n - y_n \to 0$

$f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$

Άρα $x_n = n$

$y_n = n + \varepsilon_n$, $\varepsilon_n \to 0$

$f(x_n) - f(y_n) = n^2 - (n + \varepsilon_n)^2 = -2n\varepsilon_n + \varepsilon_n^2$, $\varepsilon_n^2 \to 0$

Αλλά θέλουμε $-2n\varepsilon_n \not\to 0$

Άρα βάζουμε

$\varepsilon_n = \frac{1}{n} : -2\cancel{n}\frac{1}{\cancel{n}} = -2 \not\to 0$

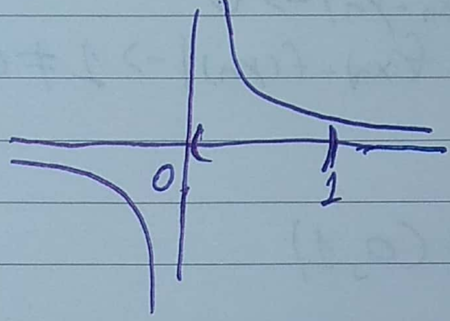
$(**) \Rightarrow f$ ομοιομ. συνεχ. $(\forall \varepsilon>0), (\exists \delta>0)(\forall x,y\in A)$ με $|x-y|<\delta \Rightarrow$
$|f(x)-f(y)|<\varepsilon \; (*)_1$

Έστω ότι η $(*)_1$ δεν είναι αληθής

$\underset{\text{άτοπο}}{\overset{\text{με}}{\Rightarrow}} (\exists \varepsilon>0)(\forall \delta>0)(\exists x_\delta, y_\delta \in A)$ ώστε $|x_\delta - y_\delta|<\delta$ και $|f(x_\delta)-f(y_\delta)|\geq\varepsilon$

Θέτουμε $\delta = 1/n \Rightarrow \exists (x_n)_n \subseteq A \; |x_n - y_n| < 1/n$, όμως $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon$

i) $f(x) = \dfrac{1}{x}$



$x\in(0,1)$ είναι ομ. συνεχ.

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$

Θα κατασκευάσουμε $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq (0,1)$: $x_n - y_n \to 0$
$f(x_n)-f(y_n) \not\to 0$

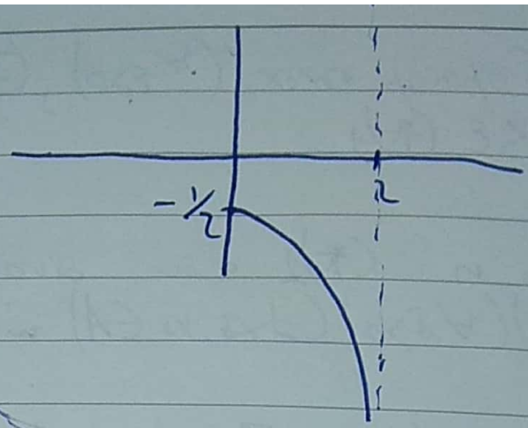
$$\left.\begin{array}{l} x_n = \dfrac{1}{n}, \; f(x_n) = n \\ y_n = \dfrac{1}{n+1}, \; f(y_n) = y+1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} |x_n - y_n| \to 0 \\ |f(x_n)-f(y_n)| \to 1 \neq 0 \end{array}$$

$f(x) = \dfrac{1}{x}, \; x\geq 1$

$|f'(x)| = \left|-\dfrac{1}{x^2}\right| = \dfrac{1}{x^2} \leq 1 \Rightarrow f\in Lip(1) \to f$ ομοιομ. συνεχής στο $[1,+\infty)$

Scanned by CamScanner

$f(x) = \frac{1}{x-2}, x \in (0,2)$



$x_n, y_n \in (0,2)$

$x_n - y_n \to 0$

$f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$

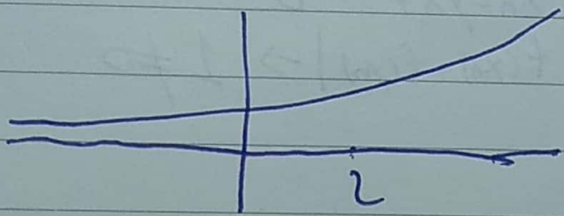
$$\left.\begin{array}{l} x_n = 2 - \frac{1}{n} \\ y_n = 2 - \frac{1}{n+1} \end{array}\right\} \begin{array}{l} |x_n - y_n| \to 0 \\ |f(x_n) - f(y_n)| \to 1 \neq 0 \end{array}$$

$f(x) = \frac{1}{x-2} \quad x \in (0,1)$

$|f'(x)| = \left|\frac{-1}{(x-2)^2}\right| = \frac{1}{|x-2|^2} \leq 1 \iff f'$ φραγμ. στο $(0,1)$

$\to f \in Lip(1)$

$f(x) = e^x$



$x \geq 2$

$|f'(x)| = |e^x| \leq e^2$

$x_n, y_n \in \mathbb{R}$

$|x_n - y_n| \to 0$

$|f(x_n) - f(y_n)| \not\to 0$

$x_n = \ln(n)$

$y_n = \ln(n+1)$

$x_n - y_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \to 0$

$f(x_n) - f(y_n) = n - (n+1) \to -1 \neq 0$